Computer rechnen nur mit Nullen und Einsen Name: ________________

Unser bekanntes Dezimalsystem mit 10 Ziffern

Ein wesentliches Merkmal eines Zahlensystems ist die verwendete Anzahl der Ziffern. Im Dezimalsystem gibt es bekanntlich die Ziffern: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Die kleinste (echte, denn vorangestellte Nullen zählen nicht) aus **zwei** Ziffern bestehende Zahl des Dezimalsystems heißt **10 (Die Zehn!)**. Die Zahl 10 ist damit die ***Basis*** des Dezimalsystems. In unserem bekannten Dezimalsystem hat jede höhrere Stelle einen um den Faktor 10 vermehrte Wertigkeit gegenüber der nächstkleineren Stelle.
Beispiele zum Aufbau:

Der Index 10 zeigt an, dass es hier sich um eine Dezimalzahl handelt.

4025_{10}	= 4 Tausender	+ 0 Hunderter	+ 2 Zehner	+ 5 Einer
4025_{10}	$= 4 \cdot 1000$	$+ 0 \cdot 100$	$+ 2 \cdot 10$	$+ 5 \cdot 1$
4025_{10}	$= 4 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$	$+ 0 \cdot 10 \cdot 10$	$+ 2 \cdot 10$	$+ 5 \cdot 1$
4025_{10}	$\mathbf{= 4 \cdot 10^3}$	$\mathbf{+ 0 \cdot 10^2}$	$\mathbf{+ 2 \cdot 10^1}$	$\mathbf{+ 5 \cdot 10^0}$

Diese Zeile zeigt besonders gut die Idee des Dezimalsystems

10^2 ist eine Potenz mit Basis 10 und Hochzahl 2: $10^2 = 10 \cdot 10 = 100$.

Aufgabe 1: *Ergänze die fehlenden Einträge wie im Beispiel oben.*

8297_{10} = 8 Tausender + ______________________________

8297_{10} $= 8 \cdot 1000$ + ______________________________

8297_{10} $= 8 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$ + ______________________________

8297_{10} $= 8 \cdot 10^3$ + ______________________________

Das Dualsystem (Zweiersystem, Binärsystem)

Im Dualsystem gibt nur die Ziffern 0 und 1, das war's!
Geräte wie Taschenrechner, Computer, Smartphones usw. können aus technischen Gründen keine Rechenoperationen mit den Ziffern des gebräuchlichen Dezimalsystems 0 bis 9 ausführen. Sie benötigen ein einfacheres Zahlensystem, das nur **die Ziffern 0 und 1 kennt**: das Dualsystem. Die Addition und andere Rechenarten sind dem Dezimalsystem aber sehr ähnlich.

Die kleinste (echte) aus **zwei** Ziffern bestehende Zahl des Dualsystems heißt $\mathbf{10_2}$ (gesprochen „eins null"). Um zu verdeutlichen, dass es sich um eine Zahl im Dualsystem handelt ist am Ende der Index 2 angehängt. Das **Dualsystem** oder **Zweiersystem** hat die *Basis* 2_{10} (gleich 10_2 im Zweiersystem) und es gibt in diesem System nur die Ziffern **0 und 1**.

Wie im Dezimalsystem kann auch im Dualsystem jede natürliche Zahl eindeutig als Summe mit den Ziffern 0 und 1 und mit den Potenzen der **Basis 2** dargestellt werden. Als Beispiel betrachten wir die **Dualzahl** $\mathbf{1101_2}$ (gesprochen: „eins eins null eins"):

Dual:				***Dezimal:***
$1101_2 = 1$ Achter	+ *1* Vierer	+ *0* Zweier	+ *1* Einer	$= 13_{10}$
$1101_2 = 1 \cdot 8$	$+ 1 \cdot 4$	$+ 0 \cdot 2$	$+ 1 \cdot 1$	$= 13_{10}$
$1101_2 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$	$+ 1 \cdot 2 \cdot 2$	$+ 0 \cdot 2$	$+ 1 \cdot 1$	$= 13_{10}$
$1101_2 = \mathbf{1 \cdot 2^3}$	$\mathbf{+ 1 \cdot 2^2}$	$\mathbf{+ 0 \cdot 2^1}$	$\mathbf{+ 1 \cdot 2^0}$	$= 13_{10}$

Diese Zeile zeigt besonders gut die Idee des Dualsystems

Aufgabe 2: *Ergänze!*	$\mathbf{2^3}$ =8	$\mathbf{2^2}$ =4	$\mathbf{2^1}$ =2	$\mathbf{2^0}$ =1	
Dezimalzahl	Achter	Vierer	Zweier	Einer	Dualzahl
$0_{10} =$					=
$1_{10} =$					$= 0001_2$
$2_{10} =$					=
$3_{10} =$					=
$4_{10} =$					=
$5_{10} =$					=
$6_{10} =$					=
$7_{10} =$					=
$8_{10} =$					=
$9_{10} =$					=
$10_{10} =$					=
$11_{10} =$					=
$12_{10} =$					=
$13_{10} =$	1	1	0	1	$= 1101_2$

*Die Dezimalzahl 13 enthält **einen** 'Achter' (es verbleibt der Wert 5), **einen** Vierer, **keinen** 'Zweier' und **einen** 'Einser': also 1101_2*

Tabelle mit den ersten 12 Stellenwerten des Dualsystems:

Stelle im Dualsystem:	12. Stelle	11. Stelle	10. Stelle	9. Stelle	8. Stelle	7. Stelle	6. Stelle	5. Stelle	4. Stelle	3. Stelle	2. Stelle	1. Stelle
Stellenwert:	2048er	1024er	512er	256er	128er	64er	32er	16er	Achter	Vierer	Zweier	Einer
Zweierpotenz:	2^{11}	2^{10}	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
Beispiel:	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**

$\mathbf{1010\ 0010\ 0100_2 = 1 \cdot 2048 + 1 \cdot 512 + 1 \cdot 32 + 1 \cdot 4 = 2596_{10}}$

Index 2, es ist eine Dualzahl

Index 10, es ist eine Dezimalzahl

Betrachte den Unterschied: Die größte Dezimalzahl mit 2 Ziffern ist ____. Die größte Dualzahl mit 2 Ziffern ist $\_\_\_\__2 = \_\_\__{10}$

Umwandlungen vom Dualsystem ins Dezimalsystem

Stellenwert:	128er	64er	32er	16er	Achter	Vierer	Zweier	Einer	Darstellung als Dezimalzahl
1. Beispiel: $1\,1010_2$	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	= 16 + 8 + 2 **= 26**
2. Beispiel: $1010\,0101_2$	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	= 128 + 32 + 4 + 1 **= 165**

Aufgabe 4: *Wandle die Dualzahlen in Dezimalzahlen um:*

Stellenwerte:	128er	64er	32er	16er	Achter	Vierer	Zweier	Einer	Dezimalzahl?
1. Dualzahl: $0000\,1010_2$	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	
2. Dualzahl: $0001\,0110_2$	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	
3. Dualzahl: $0100\,0010_2$									
4. Dualzahl: $1100\,0010_2$									

Aufgabe 5: Rechne die Dualzahlen in Dezimalzahlen direkt um!

101_2 =	0111_2 =
1110_2 =	1111_2 =
$1\,0110_2$ =	$10\,0011_2$ =
$1000\,1000_2$ =	$1111\,1111_2$ =

Umwandeln vom Dezimalsystem ins Dualsystem

1. Beispiel: Umwandeln der Dezimalzahl **14**

Stellenwerte:	Achter = 2^3	Vierer = 2^2	Zweier = 2^1	Einer = 2^0
passt der Stellenwert?	*Passt ein Achter in die 14? **Ja, → 1**, es verbleiben noch 14-8=6*	*Passt ein Vierer in die 6? **Ja, → 1** es verbleiben noch 6-4 = 2.*	*Passt ein Zweier in die 2? **Ja → 1**, es verbleiben noch 2-2 = 0*	*Passt der Einer in die 0? **Nein, → 0** **(und fertig)***
14 als Dualzahl:	**1**	**1**	**1**	**0**

2. Beispiel: Umwandeln der Dezimalzahl **7**

Stellenwerte:	Achter = 2^3	Vierer = 2^2	Zweier = 2^1	Einer = 2^0
passt der Stellenwert?	*Passt ein Achter in die 7? **Nein, → 0** es verbleiben die 7*	*Passt ein Vierer in die 7? **Ja, → 1** es verbleiben noch 7-4 = 3.*	*Passt ein Zweier in die 3? **Ja → 1**, es verbleiben noch 3-2 = 1*	*Passt der Einer in die 1? **Ja → 1!** **(und fertig)***
7_{10} als Dualzahl:	**0**	**1**	**1**	**1**

3. Beispiel: Umwandeln der Dezimalzahl **77**

Stellenwerte:	**128** in 77? Nein.	**64** in 77? Ja! (77-64=13)	**32** in 13? Nein.	**16** in 13? Nein.	**8** in 13? Ja! (13-8=5)	**4** in 5? Ja! (5-4=1)	**2** in 1? Nein.	**1** in 1? Ja!
77_{10} als Dualzahl:	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**

Aufgabe 6: *Wandle Dezimalzahlen in Dualzahl mit Hilfe der Tabellen!*

Stellenwerte:	**128** in 61? _______	**64** in ____? _______	**32** in ____? _______	**16** in ___? _______	**8** in ____? _______	**4** in ____? _______	**2** in ____? _______	**1** in ____? _______
61_{10} als Dualzahl:								

Stellenwerte:	**128** in 135? _______	**64** in ____? _______	**32** in ____? _______	**16** in ___? _______	**8** in ____? _______	**4** in ____? _______	**2** in ____? _______	**1** in ____? _______
135_{10} als Dualzahl:								

Name: ______________________________

Aufgabe 7: *Wandle die Dezimalzahlen direkt oder mit einem Zwischenschritt in Dualzahlen um.*

Beispiel: $9_{10} = 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 1001_2$	$131_{10} =$
$15_{10} =$	$188_{10} =$
$22_{10} =$	$200_{10} =$
$45_{10} =$	$255_{10} =$

Addition von Dualzahlen

Bei der Addition zweier Dualzahlen werden beide Zahlen stellenrichtig untereinander geschrieben. Es können Überträge auftreten und es gelten folgende Regeln:

```
  0     1     0     1
 +0    +0    +1    +1
                    1
 ___   ___   ___   ___
  0     1     1    10
```

bei Überträgen aus einer vorigen Stelle:

```
  01    11    01    11
 +01   +01   +11   +11
  1     11    11    11
 ____  ____  ____  ____
  10   100   100   110
```

Beispiele:

```
    1 0 1             1 1 1          0 0 0 1  1 0 1 0
  + 0 1 1         + 1 1 1 1        + 1 0 0 1  1 0 0 1
  1 1 1           1 1 1 1                1 1
  -------         ---------        ------------------
  1 0 0 0         1 0 1 1 0          1 0 1 1  0 0 1 1
```

Aufgabe 8: *Addiere folgende Dualzahlen*

```
a)     0011       b)     1111      d)  10 1100      e)  1111 0011
     + 0100            + 0001          +01 0101         +0100 1010
     ______            ______          ________         _________

f)  1110 1100        g)  1010 1111        h)  1010 1010 1111 1111
   +0101 0101           +0000 0001           +0101 0100 1010 1100
   __________           __________           ____________________
```

Das Hexadezimalsystem

Wichtige Anwendung: RGB-Farben in Html5 ausdrücken, z.B. "#FFFF00" ergibt die Farbe gelb.
Erläuterung: Die ersten beiden Ziffern (FF) bestimmen den Rotanteil, die mittleren beiden Ziffern (FF) den Grünanteil und die letzten beiden Ziffern (00) den Blauanteil. Es lassen sich mit gerade mal 6 Ziffern im Hexadezimalsystem über 16 Millionen Farben angeben. Doch: Wieso wird auf einmal von einer Ziffer F gesprochen?
Betrachte folgende Tabelle gleicher Zahlen in einer Zeile, lediglich das Zahlensystem ändert sich. Erkennst du die Ideen des Hexadezimalsystems?

Binär bzw. Dual		**Hexadezimal**		Dezimal
110	=	6	=	6
1010	=	A	=	10
1111	=	F	=	15
1 1111	=	1F	=	31
1111 1111	=	**FF**	=	**255**
1010 1100 1101 1100	=	ACDC	=	44252
1 0000 0000 0000 0000	=	10000	=	65536
1010 1111 1111 1110 0000 1000 0001 0101	=	AFFE0815	=	2952661013

Im Hexadezimalsystem werden Zahlen in einem Stellensystem mit 16 Ziffern dargestellt. Der große Vorteil ist, dass je 4 Dualziffern eine Hexadezimalziffer dabei entspricht. Die genauere Zuordnung zeigt nachfolgende Tabelle. **Aufgabe 9:** *Ergänze die fehlenden Einträge*

Dezimalzahl	Dualsystem	**Hexadezimal**
0	0 0 0 0	**0**
1	0 0 0 1	**1**
2	0 0 1 0	**2**
3	0 0 1 1	**3**
4		**4**
5		**5**
6	0 1 1 0	**6**
7	0 1 1 1	**7**
8	1 0 0 0	**8**
9	1 0 0 1	**9**
10		**A**

Dezimalzahl	Dualsystem	**Hexadezimal**
11		**B**
12		
13		
14		
15		**F**
16	1 0000	**10**
17		
18		
19		
20		
21		

2 Beispiele für die Umrechnung Hexadezimal → Dezimal:
$2F_{16} = 2 \cdot 16 + 15 = 47_{10}$

$23A_{16} = 2 \cdot 16^2 + 3 \cdot 16 + 10 = 570_{10}$

Aufgabe 10: *Wandle in die das Hexadezimalsystem und in das Dualsystem!*

Dualsystem		**Hexadezimal**		**Dezimalsystem**
0101	=	_______________	=	_______________
1011	=	_______________	=	_______________
1110	=	_______________	=	_______________
11 1011	=	_______________	=	_______________

Aufgabe 11: *Wandle in das jeweils gesuchte System!*

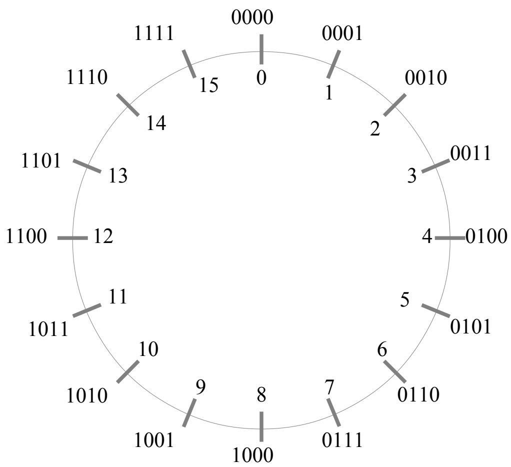
Dualsystem		**Hexadezimal**
1000 1101	=	_______________
1010 1101 1100	=	_______________
0010 0110 0111 0101	=	_______________
_____ _____ _____ ______	=	1FAD

Die Basis des Hexadezimalsystems ist 16 und als weitere Ziffern zu 0 bis 9 nimmt man die Buchstaben A bis F. Umwandlungen vom Dualsystem ins Hexadezimalsystem sind sehr einfach, da man immer nur Bitgruppen mit jeweils 4 Stellen für sich betrachten muss. (Das liegt daran, dass $2^4=16$ ergibt.)

Negative Dualzahlen **Name:** ________________________

Durch das Zusammenfassen von mehreren Dualziffern können größere Zahlen dargestellt werden.

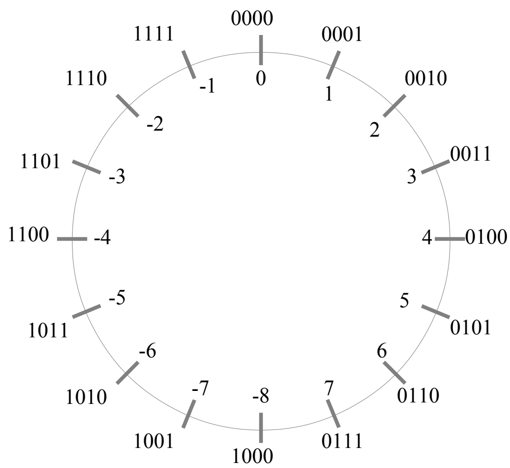
Positive vierstellige Dualzahlen (4 Bit)



Innen: Dezimalzahlen (Menge: N)
Außen: 4 stellige Dualzahlen (4 Bit)

Kleinste 4-Bit Zahl: ________
Größte 4-Bit Zahl: ________

Positive und negative Dualzahlen mit 4 Bit



Innen: Dezimalzahlen (Menge: Z)
Außen: positive und negative 4 stellige Dualzahlen (4 Bit)

Kleinste 4-Bit Zahl: __________
Größte 4-Bit Zahl: __________

Für noch größere Zahlen nutzt man 8 stellige Dualzahlen (1 Byte), 16 stellige Dualzahlen (2 Byte) oder 32 stellige Dualzahlen (4 Byte) usw.

Das Zweierkomplement

Wir bilden das Zweierkomplement einer Dualzahl um die Subtraktion auf eine Addition zurückzuführen.

1. Schritt: Invertieren der Dualziffern!
d. h. aus 0 wird 1 und aus 1 wird 0.

2. Schritt: Eins addieren!

Beispiel:

0101_2 $(= 5_{10})$ $\xrightarrow{\boxed{0 \to 1,\ 1 \to 0}}$ 1010_2 $\xrightarrow{+1}$ 1011_2 $(= -5_{10})$

Subtraktion von Dualzahlen

Beispiel: $91_{10} - 51_{10} = 40_{10}$

Wandeln in Dualzahlen: $91_{10} = 0101\ 1011_2$ $51_{10} = 0011\ 0011_2$

Zweierkomplement: $0011\ 0011_2$
1. Schritt (Inv.): $1100\ 1100_2$
2. Schritt (+1): $1100\ 1101_2 = -51_{10}$

Subtraktion durch Addition des Komplements:

$$\begin{array}{rl} 91_{10} = & 0101\ 1011_2 \\ +\text{Zwk}(51_{10}) = & 1100\ 1101_2 \\ + & \underline{1011\ 1110} \\ & (1)0010\ 1000_2 = 40_{10} \end{array}$$

Übungen zu negativen Dualzahlen

Aufgabe 1: Bilde das Zweierkomplement folgender Dualzahlen:

```
a) 0101   b) 0000 1001   c)0011 0001    d)  0000 0111
```

```
1. Schritt:

2. Schritt:
```

Aufgabe 2: Subtrahiere. Bestimme zunächst das Zweierkomplement (ZWK) und addiere es.

```
a)   0111       b) 0010 1110   c) 0010 1011        d) 0011 0010
    -0101         -0000 1001     -0011 0001          -0000 0111
ZWK:_____      ZWK:__________  ZWK:__________      ZWK:__________

a)   0111       b) 0010 1110   c) 0010 1011        d) 0011 0010
    +             +               +                   +
     ____          __________      _________           __________
```

Aufgabe 3: Wandle die Dezimalzahlen zunächst in Dualzahlen um und bilde von den Subtrahenden das Komplement. Folgende Stellenlängen sind erlaubt: 8 Bit (=1 Byte) und 16 Bit (=2 Byte).

a) 88 - 53 b) 9501 - 1977 c) 32767 - 15

$88_{10} = 0100\ 1110_2$ $9501_{10} =$

$53_{10} =$ $1977_{10} =$

Aufgabe 4: Multipliziere die Dualzahlen schriftlich. Wandle anschließend in eine Dezimalzahl um.

```
a) 1 0 1  · 1 0 1     b) 1 1 0 1 · 1 0 1 0     c) 1 0 1 0 1 1 · 1 1 1
```